| | |
|---|---|
| **V-54** (1 h 31min) 22 y 27-junio-2019<br>Resumen de Miguel Cañizares | **Acción de Hilbert-Einstein (3)**<br>**Deducción variación de la curvatura escalar** |

En el video 16 está la expresión de Tensor de Riemann, cuyos 4 índices libres los ponemos ahora con letra griegas, y el índice mudo en color:

$$\boldsymbol{R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu}}$$

El de Ricci es una contracción haciendo iguales los índices $\rho$ y $\mu$. A ambos les llamamos $\mu$ y queda un tensor de 2º orden (con dos índices libres):

$$\boldsymbol{R_{\sigma\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\mu}_{\sigma\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\mu}_{\sigma\mu} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu}}$$

**<u>Variación del Tensor de Ricci</u> $\boldsymbol{\delta R_{\sigma\nu}}$** La hallamos teniendo en cuenta que $\delta(\partial A) = \partial(\delta A)$ :

$$\boldsymbol{\delta R_{\sigma\nu}} = \partial_{\mu}(\boldsymbol{\delta}\Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}) - \partial_{\nu}(\boldsymbol{\delta}\Gamma^{\mu}_{\sigma\mu}) + (\boldsymbol{\delta}\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda})\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} + (\boldsymbol{\delta}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu})\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} - (\boldsymbol{\delta}\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda})\Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu} - (\boldsymbol{\delta}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu})\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$$

Recordemos que los Christoffel aparecen al derivar los vectores de una base respecto a una coordenada, por lo que dependen de las coordenadas elegidas y, por lo tanto, no son tensores. Sin embargo la variación de un Christoffel no depende de las coordenadas elegidas y, por lo tanto, si es un tensor. Por ejemplo llamamos: $(\boldsymbol{\delta}\Gamma^{\mu}_{\sigma\mu}) \equiv \mathrm{T}^{\mu}_{\sigma\mu}$

<u>La identidad de Palatini</u> dice que la expresión anterior de la variación del Tensor de Ricci se puede poner como diferencia de derivadas covariantes de tensores:

$$\boldsymbol{\delta R_{\alpha\beta} = \nabla_{\lambda}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}) - \nabla_{\beta}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\alpha})} \qquad \textbf{(I)}$$

Para demostrar la identidad se calcula esa diferencia de derivadas covariantes, recordando la derivada covariante de componente de tensor del tipo $T^{b}_{cd}$ : $\quad \boldsymbol{\nabla_a T^{b}_{cd} = \partial_a T^{b}_{cd} + T^{n}_{cd}\,\Gamma^{b}_{na} - T^{b}_{nd}\,\Gamma^{n}_{ca} - T^{b}_{cn}\,\Gamma^{n}_{ad}}$

$$\nabla_{\lambda}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}) = \boldsymbol{\nabla_{\lambda}T^{\lambda}_{\alpha\beta}} = \partial_{\lambda}\mathrm{T}^{\lambda}_{\alpha\beta} + \mathrm{T}^{n}_{\alpha\beta}\,\Gamma^{\lambda}_{n\lambda} - \mathrm{T}^{\lambda}_{n\beta}\,\Gamma^{n}_{\alpha\lambda} - \mathrm{T}^{\lambda}_{\alpha n}\,\Gamma^{n}_{\lambda\beta}$$

$$\nabla_{\beta}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\alpha}) = \boldsymbol{\nabla_{\beta}T^{\lambda}_{\lambda\alpha}} = \partial_{\beta}\mathrm{T}^{\lambda}_{\lambda\alpha} + \mathrm{T}^{n}_{\lambda\alpha}\,\Gamma^{\lambda}_{n\beta} - \mathrm{T}^{\lambda}_{n\alpha}\,\Gamma^{n}_{\lambda\beta} - \mathrm{T}^{\lambda}_{\lambda n}\,\Gamma^{n}_{\beta\alpha}$$

Se resta la derivada covariante de arriba menos la de abajo. Observamos que se eliminan el último término del la de arriba con el penúltimo de la de abajo. Queda (ordenando convenientemente):

$$\nabla_{\lambda}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}) - \nabla_{\beta}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\alpha}) = \partial_{\lambda}\mathrm{T}^{\lambda}_{\alpha\beta} - \partial_{\beta}\mathrm{T}^{\lambda}_{\lambda\alpha} + \mathrm{T}^{\lambda}_{\lambda n}\,\Gamma^{n}_{\beta\alpha} + \mathrm{T}^{n}_{\alpha\beta}\,\Gamma^{\lambda}_{n\lambda} - \mathrm{T}^{\lambda}_{n\beta}\,\Gamma^{n}_{\alpha\lambda} - \mathrm{T}^{n}_{\lambda\alpha}\,\Gamma^{\lambda}_{n\beta}$$

Renombramos convenientemente índices: Los mudos de la forma $\lambda \rightarrow \mu$ y $n \rightarrow \lambda$. Los libres: $\alpha \rightarrow \sigma$ y $\beta \rightarrow \nu$

$$\nabla_{\mu}(\delta\Gamma^{\mu}_{\boldsymbol{\sigma\nu}}) - \nabla_{\boldsymbol{\nu}}(\delta\Gamma\mu^{\mu}_{\boldsymbol{\sigma}}) = \partial_{\mu}\mathrm{T}^{\mu}_{\boldsymbol{\sigma\nu}} - \partial_{\boldsymbol{\nu}}\mathrm{T}^{\mu}_{\boldsymbol{\sigma}\mu} + \mathrm{T}^{\mu}_{\mu\lambda}\,\Gamma^{\lambda}_{\boldsymbol{\nu\sigma}} + \mathrm{T}^{\lambda}_{\boldsymbol{\sigma\nu}}\,\Gamma^{\mu}_{\lambda\mu} - \mathrm{T}^{\mu}_{\lambda\boldsymbol{\nu}}\,\Gamma^{\lambda}_{\boldsymbol{\sigma}\mu} - \mathrm{T}^{\lambda}_{\mu\boldsymbol{\sigma}}\,\Gamma^{\mu}_{n\boldsymbol{\nu}}$$

Si deshacemos la nomenclatura provisional que habíamos adoptado para los tensores que resultaban de variaciones de símbolos de Christoffel, y volvemos a poner: $\mathrm{T}^{\mu}_{\boldsymbol{\sigma\nu}} = (\boldsymbol{\delta}\Gamma^{\mu}_{\sigma\nu})$ ; $\mathrm{T}^{\mu}_{\boldsymbol{\sigma}\mu} = (\boldsymbol{\delta}\Gamma^{\mu}_{\sigma\mu})$ ; $\mathrm{T}^{\mu}_{\mu\lambda} = (\boldsymbol{\delta}\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda})$ etc., . nos queda:

$$\nabla_{\mu}(\delta\Gamma^{\mu}_{\boldsymbol{\sigma\nu}}) - \nabla_{\boldsymbol{\nu}}(\delta\Gamma\mu^{\mu}_{\boldsymbol{\sigma}}) = \partial_{\mu}(\boldsymbol{\delta}\Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}) - \partial_{\nu}(\boldsymbol{\delta}\Gamma^{\mu}_{\sigma\mu}) + (\boldsymbol{\delta}\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda})\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} + (\boldsymbol{\delta}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu})\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} - (\boldsymbol{\delta}\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda})\Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu} - (\boldsymbol{\delta}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu})\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$$

Expresión que coincide exactamente (teniendo en cuenta simetrías de los Christoffels) con la expresión, obtenida al principio, de la variación del Tensor de Ricci. Así, más allá de la notación de los índices, queda demostrada la identidad de Palatini **(I)**

**<u>Variación de la curvatura escalar</u> $\boldsymbol{\delta R}$**

Recordemos (video 16) que la curvatura escalar $\boldsymbol{R}$ es una contracción del tensor de Ricci, obteniéndose un tensor de orden 0, es decir, un escalar**:** $\boldsymbol{R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}}$. Hallaremos su variación como la variación de un producto e incluyendo lo obtenido para $\delta R_{\alpha\beta}$ :

$$\delta R = (\delta g^{\alpha\beta})R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}(\delta R_{\alpha\beta}) \quad = \quad (\delta g^{\alpha\beta})R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}[\boldsymbol{\nabla_{\lambda}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}) - \nabla_{\beta}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\alpha})}]$$

Sabemos que los símbolos de Christoffel tienen la forma adecuada para que se cumpla que la derivada covariante de la métrica valga cero: $\boldsymbol{\nabla_{\lambda}g^{\alpha\beta} = 0}$. Por ello, podemos introducir el factor común $g^{\alpha\beta}$dentro de las derivadas. Además ahora, al haber contraído el tensor de Ricci, todos los índices son mudos, a los que ponemos colores para visualizarlos mejor:

$$\delta \mathrm{R} = (\delta \mathrm{g}^{\alpha\beta})\mathrm{R}_{\alpha\beta} + \nabla_{\lambda}\mathrm{g}^{\alpha\beta}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}) - \nabla_{\beta}\mathrm{g}^{\alpha\beta}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\alpha})$$

Para unificar las dos derivada covariantes, renombramos en el 2º término $\lambda \rightarrow \mathbf{a}$ y en el 3º término $\beta \rightarrow \mathbf{a}$

$$\delta \mathrm{R} = (\delta \mathrm{g}^{\alpha\beta})\mathrm{R}_{\alpha\beta} + \nabla_{\mathrm{a}}\mathrm{g}^{\alpha\beta}(\delta\Gamma^{\mathrm{a}}_{\alpha\beta}) - \nabla_{\mathrm{a}}\mathrm{g}^{\alpha\mathrm{a}}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\alpha}) \quad = \quad (\delta \mathrm{g}^{\alpha\beta})\mathrm{R}_{\alpha\beta} + \nabla_{\mathbf{a}}[\mathbf{g}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{a}}_{\alpha\beta}) - \mathbf{g}^{\alpha\mathbf{a}}(\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\Gamma}^{\lambda}_{\lambda\alpha})]$$

El interior del corchetes es una resta de dos tensores y sólo tiene **a** como índice libre, así que será un tensor de primer orden (vector) que llamamos momentáneamente, para abreviar: $\mathbf{J^a = g^{\alpha\beta}(\delta\Gamma^a_{\alpha\beta}) - g^{\alpha a}(\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\alpha})}$ **(II)**
La variación de la curvatura escalar queda:

$$\boxed{\boldsymbol{\delta}\mathbf{R = (\delta g^{\alpha\beta})R_{\alpha\beta} + \nabla_a J^a}} \qquad \textbf{(III)}$$

**<u>Aplicación del principio mínima acción, para Acción de Hilbert-Einstein</u>**

Se dijo en el Video 51 que La acción de Hilber-Einstein es: $\boldsymbol{s[g] = \int d^4x \sqrt{-g} \cdot R}$

Par aplicarle el Principio de Mínima Acción hay que hallar su variación (derivada) para luego igualarla a cero.

$$\delta s[g] = \int d^4x\, \delta\left(\sqrt{-g} \cdot R\right) = \int d^4x \left[\sqrt{-g} \cdot \delta R + R \cdot \delta\sqrt{-g}\right]$$

Utilizamos ahora las expresiones **(III)** de $\delta R$ y la (III) del resumen de video 51: $\delta\sqrt{-g} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{-g}}{2}\, g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}}$:

$$\delta s[g] = \int d^4x \left[\sqrt{-g} \cdot \left(\delta g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \nabla_a J^a\right) + R \cdot \left(\frac{\sqrt{-g}}{2}\, g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}\right)\right] =$$

$$= \boldsymbol{\int d^4x \left[\sqrt{-g}\, \delta g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + R\frac{\sqrt{-g}}{2}\, g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}\right] + \int d^4x \sqrt{-g}\, \nabla_a J^a}$$

$\boldsymbol{\delta s[g]}$ es suma de 2 integrales, que llamamos para abreviar: $\boldsymbol{\delta s[g] = \int(1) + \int(2)}$

La primera integral $\int(\mathbf{1})$ se podría simplificar si se pudiera sacar factor común $\boldsymbol{\delta g^{\alpha\beta}}$**.** Recordemos que la matriz métrica con índices arriba es precisamente la matriz métrica inversa. Por lo tanto, el producto de la matriz métrica con índices abajo por la de índices arriba dará la identidad, cuyos elementos $\delta^\gamma_\alpha$ son ceros, salvo en la diagonal que son unos. En lenguaje matemático, cualquier elemento de la identidad se obtiene: $\delta^\gamma_\alpha = g_{\propto\beta}g^{\beta\gamma}$

Aplicamos variaciones (diferenciamos) a esa igualdad: $0 = \left(\delta g_{\propto\beta}\right)g^{\beta\gamma} + g_{\propto\beta}\left(\delta g^{\beta\gamma}\right)$

Tenemos la suma de dos tensores de segundo orden (2 índices libres α y γ) es decir, matrices. Si la matriz resultante es nula (cero todos sus elementos), la suma de sus trazas (suma de elementos de la diagonal α = γ) también debe ser cero, lo que equivale a poner la igualdad anterior sustituyendo γ por α: $0 = \left(\delta g_{\propto\beta}\right)g^{\beta\alpha} + g_{\propto\beta}\left(\delta g^{\beta\alpha}\right)$

Teniendo en cuenta la simetría de los elementos de la métrica y despejando: $g^{\alpha\beta}\left(\delta g_{\propto\beta}\right) = -g_{\propto\beta}\left(\delta g^{\alpha\beta}\right)$
Sustituimos en la integral y sacamos factor común:

$$\int(\mathbf{1}) = \int d^4x \left[\sqrt{-g}\, \delta g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + R\frac{\sqrt{-g}}{2}\left(-g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}\right)\right] = \int d^4x \sqrt{-g}\, \delta g^{\alpha\beta}\left[R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2} g_{\alpha\beta}\right]$$

En la segunda integral $\int(\mathbf{2})$ se hace la derivada covariante:

$$\int(\mathbf{2}) = \int d^4x \cdot \sqrt{-g}\, \left(\partial_a J^a + J^\lambda\, \Gamma^a_{a\lambda}\right)$$

Utilizamos la expresión **(II)** del resumen del video 53 de la contración del Christoffel: $\boldsymbol{\Gamma^a_{a\lambda} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\partial_\lambda\sqrt{-g}\right)}$

$$\int(\mathbf{2}) = \int d^4x \cdot \sqrt{-g}\, \left(\partial_a J^a + J^\lambda\, \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \partial_\lambda\sqrt{-g}\right) = \int d^4x \cdot \left(\sqrt{-g}\, \partial_a J^a + J^\lambda\, \partial_\lambda\sqrt{-g}\right) =$$

Los índices mudos $a$ y $\lambda$ se unifican renombrando ambas como $\lambda$, y el paréntesis resulta la derivada de un producto:

$$\int(\mathbf{2}) = \int d^4x \cdot\, \partial_\lambda\left(\sqrt{-g} \cdot J^\lambda\right)$$

En definitiva, la variación de la Acción de Hilber-Einstein, queda:

$$\boxed{\boldsymbol{\delta s[g] = \int d^4x \sqrt{-g}\, \delta g^{\alpha\beta}\left[R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2} g_{\alpha\beta}\right] + \int d^4x \cdot \partial_\lambda\left(\sqrt{-g} \cdot J^\lambda\right)}} \qquad \textbf{(IV)}$$

La primera integral se hace nula si $\boldsymbol{R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2} g_{\alpha\beta} = 0}$. La segunda depende de que la variedad (espacio-tiempo) sea cerrado (haya una hipersuperficie sin bordes que lo envuelve todo) o abierto (tenga bordes)